

Sur l'étude théorique de réseaux de diffraction constitués de matériaux anisotropes

Gérard TAYEB, Michel CADILHAC et Roger PETIT

Résumé — On sait que le problème de la diffraction d'une onde plane par un réseau est souvent ramené à la résolution d'une équation intégrale et, en milieu isotrope, des articles de synthèse permettent aujourd'hui de se documenter sur ce sujet ([1], [2]). On étudie ici la diffraction par un réseau tracé sur support anisotrope, problème qui, à notre connaissance, n'a pas encore été résolu. La complexité des équations rencontrées nous a conduit à une analyse structurelle du problème à laquelle nous consacrons cette Note.

On the theoretical study of diffraction gratings made with anisotropic media

Abstract — As it is well known, the diffraction of a plane wave by a grating can be reduced to an integral equation. In this paper we study the diffraction by a grating ruled on an anisotropic substrate, a problem which, to our knowledge, has not yet been solved. Due to the complexity of the associated equations, this Note is devoted to a structural analysis of the mathematical problem.

1. ÉNONCÉ DU PROBLÈME PHYSIQUE ET NOTATIONS. — En régime harmonique de pulsation ω et moyennant une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$, les champs sont représentés par les vecteurs complexes \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} . Nous utilisons un repère orthonormé 0 , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 . La structure étudiée, invariante par translation suivant \mathbf{e}_3 , est représentée sur la figure 1. Le réseau est la surface d'équation $y=f(x)$, et la fonction périodique f , de classe C^2 et de période d , décrit le profil \mathcal{P} de sa section droite. La perméabilité est partout égale à μ_0 . Le domaine Ω^- ($y < f(x)$) est rempli d'un milieu anisotrope de permittivité relative matricielle et éventuellement complexe $[\varepsilon_2]$. Le réseau est éclairé par une onde plane donnée se propageant sous l'incidence θ dans Ω^+ ($y > f(x)$) supposé rempli d'un milieu isotrope de permittivité relative réelle ε_1 . La polarisation de l'onde incidente peut être quelconque, mais son vecteur d'onde n'a pas de composante sur \mathbf{e}_3 .

Nous notons $\mathbf{n}(M)$ ou $\mathbf{n}(x)$ le vecteur unitaire normal au profil au point $M(x, f(x))$ et dirigé vers Ω^+ , et $\mathbf{t}(x)$ le vecteur unitaire tangent en M au profil et dirigé dans le sens des x croissants.

Nous cherchons à déterminer le champ total qui est pseudo-périodique [1] en nous souvenant que si u désigne l'une quelconque de ses composantes :

$$(1) \quad \begin{cases} u(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(y) \exp(i\alpha_n x), \\ \text{où } \alpha_n = \sqrt{\varepsilon_1} k_0 \sin \theta + n 2\pi/d \text{ et } k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}. \end{cases}$$

La méthode intégrale utilisée ici est une adaptation d'une démarche en trois temps classiquement employée pour la diffraction par une tige cylindrique parallèle à \mathbf{e}_3 . Elle comporte la détermination de la solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles, l'expression du champ diffracté à l'aide d'une fonction F à quatre composantes convenablement définie sur \mathcal{P} (formule de Kirchhoff-Helmholtz généralisée) et l'obtention d'une équation intégrale pour F après un passage à la limite convenable.

2. SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DE L'ÉQUATION DE PROPAGATION DANS UN MILIEU ANISOTROPE.
— Notre formulation nécessite la connaissance de trois « vecteurs de Green »

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

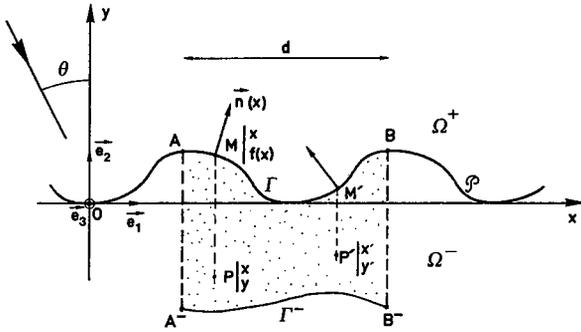


Fig. 1 — A⁻ et B⁻ ont même ordonnée;
 Γ est l'arc AB de \mathcal{P} .
 Fig. 1. — A⁻ and B⁻ have the same ordinate;
 Γ is the AB arc of \mathcal{P} .

$g_i(x, y) = \sum_{j=1}^3 g_{ij} e_j$ vérifiant la condition de rayonnement (CR) pour $y \rightarrow \pm \infty$ et solutions de : $\text{rot rot } \mathbf{g}_i - k_0^2 {}^t[\varepsilon_2] \mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1/d) \delta(y) \exp(-i\alpha_n x)$, $i = 1, 2, 3$ où ${}^t[\varepsilon_2]$ est la matrice

transposée de $[\varepsilon_2]$ et $\delta(y)$ la distribution de Dirac. La détermination des g_i se révèle finalement plus facile dans le cas des réseaux que dans le cas des tiges. En tirant profit de la périodicité, elle se ramène en effet à la transformation de Fourier pour des fonctions d'une seule variable; en contrepartie, les g_{ij} sont obtenus sous la forme de séries. On trouvera dans un précédent article [3] l'expression explicite des g_i dans le cas où

$$[\varepsilon_2] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

3. GÉNÉRALISATION DES FORMULES DE KIRCHHOFF-HELMHOLTZ. — Étant donné deux points $P(x, y)$ et $P'(x', y')$, posons $G_i(P', P) = g_i(x' - x, y' - y)$. On a :

$$(2) \quad \text{rot}_{P'} \text{rot}_{P'} G_i(P', P) - k_0^2 {}^t[\varepsilon_2] G_i(P', P) = \mathbf{e}_i \sum_n \frac{1}{d} \delta(y' - y) \exp(-i\alpha_n(x' - x)).$$

Soit un quelconque champ électrique E vérifiant l'équation de propagation dans Ω^- :

$$(3) \quad \text{rot rot } E(P') - k_0^2 [\varepsilon_2] E(P') = 0 \quad \text{dans } \Omega^-,$$

et la CR pour $y \rightarrow -\infty$. Multiplions scalairement (2) par $E(P')$ et (3) par $G_i(P', P)$, retranchons les deux équations obtenues, et intégrons à l'intérieur du domaine pointillé (fig. 1). Après transformation de l'intégrale de surface en intégrale de contour, on obtient en tenant compte des propriétés de périodicité en x' de l'intégrande et de la CR qui entraîne la nullité de la contribution de Γ^- :

$$(4) \quad \int_{\Gamma} \mathbf{n}(M') \cdot [G_i(M', P) \wedge \text{rot } E(M'_-) - E(M'_-) \wedge \text{rot } G_i(M', P)] dM' = \begin{cases} \mathbf{e}_i \cdot E(P) & \text{si } y < f(x), \\ 0 & \text{si } y > f(x). \end{cases}$$

Dans cette expression, $\text{rot } E(M'_-)$ désigne la limite de $(\text{rot } E)(Q)$ lorsque Q tend vers M' en restant dans Ω^- . C'est à partir de cette égalité (4) que l'on peut exprimer les

champs en fonction de leurs composantes tangentielles sur Γ (fig. 1) :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_{\Gamma} [T_1(M', P)] (\mathbf{n}(M') \wedge \mathbf{H}(M'_-)) dM' \\ - \int_{\Gamma} [T_2(M', P)] (\mathbf{n}(M') \wedge \mathbf{E}(M'_-)) dM' \\ - \int_{\Gamma} [T_3(M', P)] (\mathbf{n}(M') \wedge \mathbf{H}(M'_-)) dM' \\ - \int_{\Gamma} [T_4(M', P)] (\mathbf{n}(M') \wedge \mathbf{E}(M'_-)) dM' \end{array} \right. = \begin{cases} \mathbf{E}(P) & \text{si } y < f(x) \\ 0 & \text{si } y > f(x) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_{\Gamma} [T_1(M', P)] (\mathbf{n}(M') \wedge \mathbf{H}(M'_-)) dM' \\ - \int_{\Gamma} [T_2(M', P)] (\mathbf{n}(M') \wedge \mathbf{E}(M'_-)) dM' \\ - \int_{\Gamma} [T_3(M', P)] (\mathbf{n}(M') \wedge \mathbf{H}(M'_-)) dM' \\ - \int_{\Gamma} [T_4(M', P)] (\mathbf{n}(M') \wedge \mathbf{E}(M'_-)) dM' \end{array} \right. = \begin{cases} \mathbf{H}(P) & \text{si } y < f(x) \\ 0 & \text{si } y > f(x) \end{cases}$$

Ces relations, dans lesquelles les $[T_i]$, désignent des matrices 3×3 dont les éléments s'obtiennent à partir des $g_{ij}(x' - x, y' - y)$ et de leurs dérivées partielles par rapport à x, x', y et y' , s'appliquent en particulier au *champ total* pour $y < f(x)$. Il est nécessaire pour la suite d'obtenir des expressions analogues [que nous appellerons (5')] s'appliquant à un champ se propageant dans Ω^+ supposé rempli du diélectrique de permittivité ϵ_1 et vérifiant la CR quand $y \rightarrow +\infty$. C'est le cas du champ obtenu en retranchant le champ incident du champ total dans Ω^+ . Ces relations (5') s'obtiennent à partir de (5) en y remplaçant tous les signes $-$ par des signes $+$, en permutant le sens des inégalités figurant aux deuxièmes membres, et en changeant ϵ_x, ϵ_y et ϵ_z en ϵ_1 dans les $[T_i]$.

Les équations (5, 5') montrent qu'un champ diffracté (vérifiant la CR) pseudo-périodique est déterminé entièrement par ses composantes tangentielles sur \mathcal{P} .

4. OBTENTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES. — Soit (\mathbf{E}, \mathbf{H}) un champ électromagnétique; nous nous intéressons à ses composantes tangentielles sur \mathcal{P} décrites par les quatre fonctions :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x) = \mathbf{e}_1 \cdot \{ \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{E}(x, f(x)) \} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}(x, f(x)) / \sqrt{1+f'(x)^2} \\ F_2(x) = \mathbf{e}_3 \cdot \{ \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{E}(x, f(x)) \} = -\mathbf{t}(x) \cdot \mathbf{E}(x, f(x)) / \sqrt{1+f'(x)^2} \\ F_3(x) = \mathbf{e}_1 \cdot \{ \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{H}(x, f(x)) \} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{H}(x, f(x)) / \sqrt{1+f'(x)^2} \\ F_4(x) = \mathbf{e}_3 \cdot \{ \mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{H}(x, f(x)) \} = -\mathbf{t}(x) \cdot \mathbf{H}(x, f(x)) / \sqrt{1+f'(x)^2} \end{array} \right.$$

que nous considérons comme les composantes d'une matrice colonne à quatre éléments F .

Il est alors intéressant de définir quatre espaces vectoriels $\mathcal{V}_1^+, \mathcal{V}_1^-, \mathcal{V}_2^+, \mathcal{V}_2^-$ de la façon suivante : Pour $\sigma \in \{+, -\}$, on dira que $F \in \mathcal{V}_i^\sigma$ si F représente, conformément à (6), la valeur sur \mathcal{P} des composantes tangentielles d'une solution des équations de Maxwell homogènes dans le domaine Ω^σ supposé rempli d'un milieu de permittivité ϵ_1 (si $i=1$) ou $[\epsilon_2]$ (si $i=2$) et vérifiant la CR dans ce domaine.

Nous désignons par F et F^{inc} les colonnes associées par (6) au champ total et au champ incident. L'idée fondamentale est que F est, pour F^{inc} donné, caractérisé par la proposition :

$$(7) \quad [(F - F^{\text{inc}}) \in \mathcal{V}_1^+ \text{ et } F \in \mathcal{V}_2^-].$$

Le problème physique initial est ainsi mathématiquement équivalent à la recherche de l'intersection de \mathcal{V}_2^- et d'un translaté de \mathcal{V}_1^+ . A partir de (5) et (5'), et après quelques manipulations vectorielles suivies d'un passage à la limite non trivial [4] (faire tendre P vers un point M du profil), on exhibe deux opérateurs intégraux matriciels et involutifs S_1 et S_2 respectivement attachés aux permittivités ϵ_1 et $[\epsilon_2]$, agissant dans l'espace $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1^+ \oplus \mathcal{V}_1^- = \mathcal{V}_2^+ \oplus \mathcal{V}_2^-$. Les noyaux de S_2 (resp. S_1) sont formés à partir des éléments des matrices $[T_i(M', M)]$ associés à $[\epsilon_2]$ (resp. ϵ_1). Ces opérateurs S_1 et S_2 sont caractérisés par les quatre équivalences :

$$(8) \quad F \in \mathcal{V}_i^\sigma \Leftrightarrow S_i F = \sigma F, \quad i \in \{1, 2\} \text{ et } \sigma \in \{+, -\}.$$

La condition (7) équivaut donc à :

$$(9) \quad [S_1(F - F^{\text{inc}}) = F - F^{\text{inc}} \quad \text{et} \quad S_2 F = -F].$$

On obtient ainsi un système S formé de deux blocs de quatre équations intégrales couplées pour les quatre fonctions inconnues F_i . Si dans chaque bloc on numérote les équations en accord avec (6) il apparaît que les équations 2 et 4 sont conséquence des équations 1 et 3. Cela résulte de considérations fondées sur un bilan énergétique permettant d'établir qu'un champ satisfaisant la CR est déterminé de façon unique par la donnée de F_1 et F_3 . On peut donc se contenter de retenir dans chaque bloc les équations 1 et 3 obtenant ainsi un système de quatre équations équivalent au système initial S. Il se trouve que ce procédé permet d'éliminer les noyaux ayant les plus fortes singularités (parties finies).

Considérons maintenant les quatre opérateurs idempotents $P_i^\sigma = (1 + \sigma S_i)/2$ qui ont, comme on le vérifie immédiatement, les propriétés suivantes :

$$F \in \mathcal{V}_i^+ \Leftrightarrow P_i^+ F = F \Leftrightarrow P_i^- F = 0; \quad F \in \mathcal{V}_i^- \Leftrightarrow P_i^- F = F \Leftrightarrow P_i^+ F = 0.$$

Leur emploi permet de remplacer (7) par le nouveau système :

$$(10) \quad [P_1^-(F - F^{\text{inc}}) = 0 \quad \text{et} \quad P_2^+ F = 0].$$

Du point de vue pratique, il est intéressant de noter que l'introduction d'une inconnue auxiliaire permet même de ramener le problème à la résolution d'un système de deux équations intégrales. Puisque, comme nous l'avons vu plus haut, la connaissance des composantes 1 et 3 d'une colonne de \mathcal{V}_1^- suffit pour déterminer entièrement cette colonne, on se persuade que la colonne F peut s'écrire sous la forme $F = G + J$ où $G \in \mathcal{V}_1^-$ et J est une colonne de \mathcal{V} ayant ses composantes J_1 et J_3 nulles. On a alors $P_1^+ F = P_1^+ J$ ce qui donne, par addition avec la première égalité de (10) :

$$(11) \quad F = P_1^+ J + F^{\text{inc}}.$$

De la deuxième égalité de (10) et de (11), on tire : $P_2^+ P_1^+ J + P_2^+ F^{\text{inc}} = 0$, ce qui représente un système de quatre équations intégrales pour les deux fonctions inconnues J_2 et J_4 . Comme précédemment, les équations 2 et 4 sont conséquence des deux autres qui constituent par suite un système de deux équations permettant de déterminer J. La colonne F est alors donnée par (11). On notera que ceci est une généralisation au cas des milieux anisotropes de la méthode proposée par D. Maystre [1] en milieu isotrope.

La méthode présentée ici permet de traiter le problème de la diffraction d'une onde plane par un réseau tracé sur support anisotrope, quand on connaît les solutions élémentaires de l'équation de propagation dans un tel milieu. Nous avons pour l'instant réalisé un programme pour des matrices $[\varepsilon_2]$ diagonales. Dans ce cas, des calculs numériques ont déjà été effectués; ils feront l'objet d'une prochaine Note.

Note reçue le 22 février 1988, acceptée le 6 juin 1988.

Résumé d'un texte qui sera conservé 5 ans dans les archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Topics in Current Physics, *Electromagnetic Theory of Gratings*, R. PETIT éd., Springer-Verlag, 22, 1980.
- [2] D. MAYSTRE, Rigorous vector theories of diffraction gratings, in *Progress in Optics*, E. WOLF éd., Elsevier Science Publishers B.V., XXI, 1984.
- [3] G. TAYEB, Sur la résolution de l'équation $\text{rot rot } E - [A] E = S$ en théorie des réseaux anisotropes, *Proceedings of the 9th Colloque "Hertzian Optics and Dielectrics"*, Pisa, Sept. 1987, p. 201-204.
- [4] D. COLTON et R. KRESS, *Integral equation methods in scattering theory*, Wiley-Interscience, 1983.