TSE

5

Sur la résolution de l'équation rot rot $\vec{E}$- [A] $\vec{E}$= $\vec{S}$ en théorie des réseaux anisotropes

G. TAYEB
Laboratoire d'Optique Electromagnétique, U.A. CNRS n° 843,
Faculté des Sciences et Techniques, Centre de Saint-Jérôme,
13397 Marseille Cedex 13, France

Abstract :

The coordinate system being chosen, [A] is a known matrix ; the unknown $\vec{E}$ and the source $\vec{S}$ are vectorial distributions on a convenient functional space. Our final goal is to determine the field diffracted by an anisotropic grating through the solving of integral equations. In this paper, we intend to inverse the operator (curl curl -[A]), which is equivalent to the determination of "Green's dyadics for anisotropic gratings".

1. Introduction.

On connait l'importance de l'équation rot rot $\vec{E}$ - [A] $\vec{E}$ = $\vec{S}$ qui remplace l'équation de Helmholtz quand grad div $\vec{E}$ n'est pas nul. La résolution de cette équation n'est pas un problème trivial. Sa solution ne peut pas être donnée sous forme explicite, sauf pour des matrices [A] très particulières. Nous envisageons successivement le cas où le champ $\vec{E}$ dépend des trois coordonnées (application à la diffraction par un obstacle de forme quelconque), puis de deux coordonnées (problème à deux dimensions) et enfin le cas des réseaux. Dans ce dernier cas, on montre qu'en utilisant la périodicité de la structure et la pseudo-périodicité qui en résulte[1] pour $\vec{E}$, l'étude, a priori compliquée, se simplifie : au moins pour certaines valeurs de [A], on peut même exprimer explicitement la solution.

2. Position du problème. Notations.

En régime harmonique (pulsation ω, longueur d'onde dans le vide $\lambda = 2\pi/k$), les champs vectoriels sont représentés par des vecteurs complexes moyennant une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$. On désigne par $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ les vecteurs unitaires d'un repère (Oxyz). Dans l'équation :

$$\text{rot rot } \vec{E} - [A]\,\vec{E} = \vec{S}\,, \qquad (1)$$

$\vec{E}(x,y,z)$ et $\vec{S}(x,y,z)$ sont des distributions vectorielles qui représentent le champ électrique complexe et leur source, et [A] est une matrice 3 x 3 égale (à une constante multiplicative près) à la permittivité du milieu. La résolution de (1) se ramène à la détermination des trois distributions vectorielles $\vec{g}_i$ telles que :

$$i = 1, 2, 3, \qquad \text{rot rot } \vec{g}_i - [A]\,\vec{g}_i = \vec{e}_i\,\delta \qquad (2)$$

où δ représente l'unité de convolution <u>adaptée au problème considéré</u>*. Il est en effet facile de montrer que $\vec{E}$ s'exprime en fonction de $\vec{S}$ par :

$$\vec{E} = {}^t[g] * \vec{S}\,, \qquad (3)$$

---

* Il s'agit par exemple de la classique "fonction de Dirac" dans l'étude du problème à 3 dimensions, où $\vec{E}$ et $\vec{S}$ sont des éléments de $\mathcal{D}'$ (distributions vectorielles définies sur l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables à support borné).

c'est-à-dire que, pour $i = 1, 2, 3$:

$$E_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ji} * S_j \ , \tag{4}$$

où les 9 distributions g_{ji} sont liées aux $\vec{g}_i$ par :

$$\vec{g}_i = \sum_j g_{ij} \ \vec{e}_j \ . \tag{5}$$

3. Détermination des transformées de Fourier des g_{ij}.

Supposant que $\vec{E}$, $\vec{S}$ et $\vec{g}_i$ sont des distributions tempérées[2] (cela est le cas dans les problèmes rencontrés en pratique), désignons par σ_1, σ_2 et σ_3 les variables conjuguées de x,y,z dans la transformation de Fourier**, et par $\vec{\sigma}$ le vecteur de composantes (σ_1, σ_2, σ_3). L'équation (2) donne :

$$- 4\pi^2 \ \vec{\sigma} \wedge (\vec{\sigma} \wedge \hat{\vec{g}}_i) - [A] \ \hat{\vec{g}}_i = \vec{e}_i \tag{6}$$

La résolution de (6) donne, après quelques calculs :

$$\hat{\vec{g}}_i(\vec{\sigma}) = [M] \ \vec{e}_i + 4\pi^2 \ \frac{\vec{\sigma}.[M] \ \vec{e}_i}{1 - 4\pi^2 \ \vec{\sigma}.[M] \ \vec{\sigma}} \ [M] \ \vec{\sigma} \ , \tag{7}$$

$$[M] = [M(\sigma)] = (4\pi^2 \ \sigma^2 \ [I] - [A])^{-1} \ , \tag{8}$$

[I] désignant la matrice identité.
On constatera que l'expression des $\hat{\vec{g}}_i$ est en général très lourde, et que le retour aux $\vec{g}_i$ est par conséquent difficile. Dans un premier temps, nous nous sommes donc limités à des champs dépendant seulement de deux variables (x et y), et dans ces conditions $\sigma_3 = 0$. Par souci de simplicité, nous avons déterminé les $\widehat{g_{ij}}$ pour des milieux dans lesquels [A] prend l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$[A] = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$[A] = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & Q \\ 0 & 1 & 0 \\ -Q & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

L'expression (10) caractérise des milieux "gyromagnétiques" ; c'est par exemple le cas de certains composés métalliques placés dans un champ magnétique uniforme permanent. Elle conduit à des expressions très encombrantes pour les $\widehat{g_{ij}}$, expressions que nous ne reproduirons pas ici. L'expression (9) se rencontre dans le cas de milieux "biaxes" ; portée dans (8) et (7), elle donne, après quelques astuces de calcul inspirées des cours traditionnels, et en posant $\rho_i = 2\pi\sigma_i$, $\rho_3 = 0$, $\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$:

** Il s'agit de la transformation de Fourier au sens des distributions, définie de sorte que la transformée $\hat{f}$ d'une fonction sommable soit donnée par :

$$\hat{f}(\vec{\sigma}) = \iiint f(\vec{r}) \exp(-2i\pi \ \vec{\sigma}.\vec{r}) \ d^3 \vec{r} \ ;$$

$\vec{r}$ est le vecteur de composantes (x,y,z).

$$\widehat{g_{ij}}(\rho_1,\rho_2) = \frac{\delta_{ij}}{\rho^2 - A_{ij}} -$$

$$- \frac{(\rho^2 - A_{11})(\rho^2 - A_{22})\,\rho_i\rho_j}{(A_{11}\rho_1^2 + A_{22}\rho_2^2 - A_{11}A_{22})(\rho^2 - A_{ii})(\rho^2 - A_{jj})} . \qquad (11)$$

4. <u>Cas des réseaux</u>.

Envisageons maintenant le cas d'un réseau anisotrope, c'est-à-dire d'une structure périodique en x (de période d) et invariante par translation selon Oz. Le réseau est éclairé par une onde plane de longueur d'onde λ dont le vecteur d'onde appartient au plan (xy) et fait avec l'axe des y un angle θ. Le lecteur est invité à se reporter à la référence 1 dont nous adoptons les notations. On y montre que, dans ces conditions, les composantes du champ électromagnétique peuvent être considérées comme des distributions de $\mathcal{R}'^{+}$ (distributions pseudo-périodiques) pouvant s'écrire :

$$T(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n(y)\exp(+i\,\alpha_n\,x) , \qquad T_n(y) \in \mathcal{D}' ,$$

où les coefficients α_n dépendent de λ, θ, d et n. Nous choisissons pour les $\vec{g}_i$ des éléments de $\mathcal{R}'^{-}$ pouvant s'écrire :*

$$\vec{g}_i(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{g}_{in}(y)\exp(-i\,\alpha_n\,x) . \qquad (12)$$

On définit dans $\mathcal{R}'^{-}$ une convolution et une unité de convolution :

$$\delta_{\mathcal{R}^-}(x,y) = \sum_n \frac{1}{d}\,\delta(y)\exp(-i\alpha_n x) .$$

Le problème est d'obtenir les solutions de :

$$i = 1 \text{ à } 3, \quad \text{rot rot } \vec{g}_i - [A]\,\vec{g}_i = \vec{e}_i\,\delta_{\mathcal{R}^-}(x,y) . \qquad (13)$$

Pour assurer l'unicité, nous imposons aux $\vec{g}_i$ de satisfaire une "condition d'ondes sortantes vers le haut et vers le bas". Cela signifie que les $\vec{g}_i$ doivent rester bornés lorsque $y \to \pm\infty$, et qu'ils doivent s'exprimer lorsque $y \to \pm\infty$ sous la forme d'une superposition d'ondes planes sortantes. Les $\vec{g}_{in}$ sont alors des distributions tempérées ayant une transformée de Fourier. L'équation (12) donne :

$$\widehat{g_{ij}}(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_n \widehat{g_{ijn}}(\sigma_2)\,\delta(\sigma_1 + \frac{\alpha_n}{2\pi}) . \qquad (14)$$

En reprenant soigneusement les calculs exposés dans le paragraphe 3, on constate que $\widehat{g_{ijn}}(\sigma_2)$ se déduit de l'expression de $\widehat{g_{ij}}(\sigma_1,\sigma_2)$ en remplaçant σ_1 par $(-\alpha_n/2\pi)$. On remarque donc que <u>le cas des réseaux se présente finalement de manière plus agréable que le cas général à deux dimensions</u>, puisqu'il suffit pour déterminer les $g_{ij}(x,y)$, de trouver l'inverse de Fourier de <u>fonctions d'une seule variable</u> σ_2. En contre partie, les g_{ij} s'obtiennent alors sous la forme de séries. Après des calculs utilisant les propriétés des distributions et de la transformation de Fourier, on arrive au <u>résultat important</u> suivant :

---

* C'est pour des raisons de commodité qui ne peuvent être détaillées dans cet exposé succint que nous choisissons la base des $\exp(-i\alpha_n x)$ plutôt que celle des $\exp(+i\alpha_n x)$ comme il est fait dans la référence 1. Les définitions et résultats donnés dans cette référence restent valables pourvu que l'on y remplace α_n par $(-\alpha_n)$.

Lorsque [A] est de la forme (9), les solutions de (13) exprimées selon (12) et vérifiant une condition d'ondes sortantes pour $y \to \pm\infty$, ont des composantes définies par (5) qui valent :

$$g_{11}(x,y) = \sum_n \frac{i\beta_n}{2d\,A_{11}} \exp(-i\alpha_n x + i\beta_n |y|)$$

$$g_{12}(x,y) = g_{21}(x,y) = \sum_n \frac{i\alpha_n}{2d\,A_{22}} \,\mathrm{sgn}(y)\, \exp(-i\alpha_n x + i\beta_n |y|)$$

$$g_{22}(x,y) = \sum_n \frac{1}{d\,A_{22}} \left[\frac{i\,A_{11}\,\alpha_n^2}{2\,A_{22}\,\beta_n} - \delta(y) \right] \exp(-i\alpha_n x + i\beta_n |y|)$$

$$g_{33}(x,y) = \sum_n \frac{i}{2d\,\beta'_n} \exp(-i\alpha_n x + i\beta'_n |y|)$$

$$g_{23} = g_{32} = g_{13} = g_{31} = 0 .$$

Dans ces expressions, sgn(y) représente la fonction égale à +1 si $y > 0$ et à -1 si $y < 0$. Les coefficients β_n et β'_n sont définis par :

$$\beta_n = \sqrt{(A_{22} - \alpha_n^2)\, A_{11}/A_{22}} \; ; \qquad \beta'_n = \sqrt{A_{33} - \alpha_n^2}$$

et les racines (éventuellement complexes) ~~dans le cas où les A_{ij} le sont~~) sont déterminées de la façon suivante :

$$z \in \mathbb{C} , \quad \mathrm{Im}(\sqrt{z}) > 0 \qquad \text{ou bien} \quad \sqrt{z} > 0.$$

5. Conclusion.

Des études sont actuellement en cours en supposant [A] diagonale. Faute de temps, nous n'avons pas encore abordé la partie numérique. Il apparait toutefois que les équations intégrales auxquelles on est conduit sont du même type que celles rencontrées dans le problème isotrope. Ceci signifie qu'elles ont les mêmes noyaux et que par suite nous pourrons profiter pleinement de l'Expérience acquise en ce domaine au Laboratoire lors de nos précédentes études sur les réseaux. L'optimisme est donc de rigueur... Par contre, le cas d'une matrice [A] quelconque est beaucoup plus inquiétant. La rédaction d'un programme général (traitant le cas d'un réseau anisotrope, éventuellement recouvert de couches anisotropes, avec des matrices de permittivité quelconques) apparait pour l'instant une tâche énorme. La méthode différentielle n'étant guère plus prometteuse[3], il faudra sans doute attendre plusieurs années, pour que la prédiction des propriétés d'une structure périodique anisotrope devienne une affaire de routine. Pour l'instant, et à notre connaissance, une seule étude[4] mérite d'être signalée. Elle ne concerne toutefois que des structures de forme particulière ("slanted gratings") et sous entend la résolution d'un problème aux valeurs propres qui risque de réserver des surprises sur le plan numérique.

Je tiens à remercier Mrs. les Professeurs M. Cadilhac et R. Petit qui ont suggéré ce travail et en ont assuré la direction.

Références.

1 Electromagnetic Theory of Gratings, Editor : R. Petit, Topics in Current Physics, Vol. 22, Springer-Verlag., 1980.
2 Laurent Schwartz, Theory des distributions, Hermann, Paris, 1966.
3 G. Tayeb, R. Petit and M. Cadilhac, On the theoretical and numerical study of diffraction gratings coated with anisotropic layers. Compte rendu du 14e Congrès de la C.I.O., Québec, Canada, Août 1987.
4 K. Rokushima, J. Yamakita, Analysis of anisotropic dielectric gratings. J. Opt. Soc. Am., Vol. 73, n° 7, July 1983, p. 901-908.