UE 52 P - Partiel, 11/2012.

Interférence entre 2 ondes planes.

A1 traité en cours

$$\vec{E}^2 = \vec{E}\cdot\vec{E} = Re(\vec{\mathcal{E}}e^{-i\omega t})\cdot Re(\vec{\mathcal{E}}e^{-i\omega t}) = \frac{\vec{\mathcal{E}}e^{-i\omega t}+\bar{\vec{\mathcal{E}}}e^{+i\omega t}}{2}\cdot\frac{\vec{\mathcal{E}}e^{-i\omega t}+\bar{\vec{\mathcal{E}}}e^{+i\omega t}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\vec{\mathcal{E}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}}} + \vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}e^{-2i\omega t} + \bar{\vec{\mathcal{E}}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}}}e^{2i\omega t}\right].$$

$$\boxed{\langle\vec{E}^2\rangle_t = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}}}}$$

A2 Dans un milieu homogène, sans sources, en régime harmonique, de permittivité ε ($\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon\vec{\mathcal{E}}$) et de perméabilité μ_0 ($\vec{\mathcal{B}} = \mu_0\vec{\mathcal{H}}$), les équations de Maxwell s'écrivent

$rot\,\vec{\mathcal{E}} = i\omega\mu_0\vec{\mathcal{H}}$

$rot\,\vec{\mathcal{H}} = \cancel{\vec{j}} - i\omega\varepsilon\vec{\mathcal{E}}$

$\Rightarrow rot(rot\,\vec{\mathcal{E}}) = i\omega\mu_0(-i\omega\varepsilon)\vec{\mathcal{E}} \Rightarrow grad(div\,\vec{\mathcal{E}}) - \Delta\vec{\mathcal{E}} = \omega^2\varepsilon\mu_0\vec{\mathcal{E}}$.

et $div\,\vec{\mathcal{D}} = \cancel{\rho} = 0 \Rightarrow \varepsilon\, div\,\vec{\mathcal{E}} = 0 \Rightarrow div\,\vec{\mathcal{E}} = 0$.

d'où en posant $\boxed{k^2 = \omega^2\varepsilon\mu_0}$, $\Delta\vec{\mathcal{E}} + k^2\vec{\mathcal{E}} = \vec{0}$

on obtient de même : $\Delta\vec{\mathcal{H}} + k^2\vec{\mathcal{H}} = \vec{0}$ | éq. de Helmholtz.

si $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}_0}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ est solution, $\Delta\vec{\mathcal{E}} + k^2\vec{\mathcal{E}} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{k}\cdot\vec{k}\,\vec{\mathcal{E}} + k^2\vec{\mathcal{E}} = \vec{0}$.

$\Rightarrow \boxed{\vec{k}\cdot\vec{k} = \omega^2\varepsilon\mu_0}$ (a) est une condition nécessaire.

$div\,\vec{\mathcal{E}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0}$ (b) est une condition nécessaire.

Même dans un milieu sans pertes (ε réel), il existe des ondes planes solution avec des $\vec{k}$ complexes - C'est le cas des onde évanescentes -

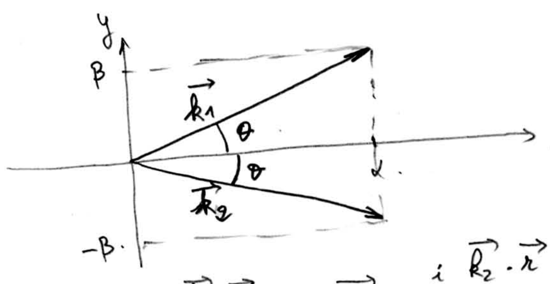
Si $\vec{k}$ est réel, (a) $\Rightarrow \boxed{\|\vec{k}\| = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0} = \frac{\omega}{c}}$ ($c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}$ est la vitesse de la lumière dans le milieu).

Exemple de champ solution : $\vec{\mathcal{E}} = \vec{e_x}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e_y}$

Exemple de champ qui n'est pas solution : $\vec{\mathcal{E}} = \vec{e_x}\,e^{i\frac{\omega}{c}x}$. ($\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e_x}$).

ne vérifie pas (b).

A3.



$\vec{k_1}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{vmatrix}$ $\vec{k_2}\begin{vmatrix}\alpha\\ -\beta\\ 0\end{vmatrix}$

A4 $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}_{01}}e^{i\vec{k_1}\cdot\vec{r}} + \vec{\mathcal{E}_{02}}e^{i\vec{k_2}\cdot\vec{r}}$

$$\langle\vec{E}^2\rangle = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}}} = \frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{E}_{01}}e^{i\vec{k_1}\cdot\vec{r}} + \vec{\mathcal{E}_{02}}e^{i\vec{k_2}\cdot\vec{r}}\right]\cdot\left[\bar{\vec{\mathcal{E}_{01}}}e^{-i\vec{k_1}\cdot\vec{r}} + \bar{\vec{\mathcal{E}_{02}}}e^{-i\vec{k_2}\cdot\vec{r}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{E}_{01}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{01}}} + \vec{\mathcal{E}_{02}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{02}}} + \vec{\mathcal{E}_{01}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{02}}}e^{i(\vec{k_1}-\vec{k_2})\cdot\vec{r}} + \vec{\mathcal{E}_{02}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{01}}}e^{i(\vec{k_2}-\vec{k_1})\cdot\vec{r}}\right].$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{E}_{01}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{01}}} + \vec{\mathcal{E}_{02}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{02}}} + \vec{\mathcal{E}_{01}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{02}}}e^{i2\beta y} + \vec{\mathcal{E}_{02}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{01}}}e^{-i2\beta y}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{E}_{01}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{01}}} + \vec{\mathcal{E}_{02}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{02}}} + 2\,Re\left(\vec{\mathcal{E}_{01}}\cdot\bar{\vec{\mathcal{E}_{02}}}e^{2i\beta y}\right)\right]$$

Les champs n'interfèrent pas si $\langle \vec{E}^2 \rangle$ ne dépend pas de la position dans l'espace (comme pour chacune des ondes planes prise séparément), ce qui est le cas si

* $\beta = 0$, soit $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$
* $\vec{\mathcal{E}}_{01} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{02} = 0$, ce qui peut par exemple être le cas si $\vec{\mathcal{E}}_{01} \parallel \vec{e_z}$ et $\vec{\mathcal{E}}_{02}$ est dans $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$.

A5 $\vec{\mathcal{E}}_1 = \mathcal{E}_0 \vec{e_z}\, e^{i \vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$ est polarisé rectilignement selon $\vec{e_z}$.

$\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}_0 \vec{e_z}\, e^{i \vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$ idem.

$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \vec{e_z} \left(e^{i \vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + e^{i \vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \right)$ idem.

A6. $\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\, e^{-i\omega t} \right] = \mathrm{Re}\left[\mathcal{E}_0 \vec{e_z}\, e^{i\alpha x} \left(e^{i\beta y} + e^{-i\beta y} \right) e^{-i\omega t} \right]$

soit $\boxed{\mathcal{E}_0 = |\mathcal{E}_0|\, e^{i\psi}}$; $e^{i\beta y} + e^{-i\beta y} = 2\cos(\beta y)$.

$$\boxed{\vec{E} = 2\, |\mathcal{E}_0|\, \vec{e_z} \cos(\beta y) \cos(\alpha x - \omega t + \psi)}$$

$$\langle \vec{E}^2 \rangle_t = 4\, |\mathcal{E}_0|^2 \cos^2(\beta y) \underbrace{\langle \cos^2(\alpha x - \omega t + \psi) \rangle_t}_{= 1/2}$$

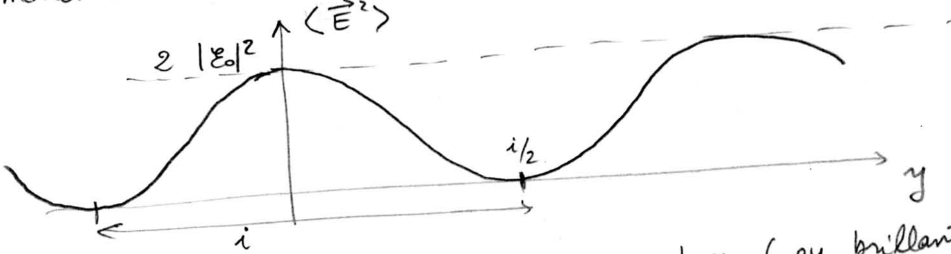
$$\boxed{\langle \vec{E}^2 \rangle = 2\, |\mathcal{E}_0|^2 \cos^2(\beta y)}.$$

(On peut aussi utiliser A4 :

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left[|\mathcal{E}_0|^2 + |\mathcal{E}_0|^2 + 2\, \mathrm{Re}\left(|\mathcal{E}_0|^2 e^{2i\beta y} \right) \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[2\, |\mathcal{E}_0|^2 + 2\, |\mathcal{E}_0|^2 \cos(2\beta y) \right]$$
$$= |\mathcal{E}_0|^2 \left(1 + \cos(2\beta y) \right) = 2\, |\mathcal{E}_0|^2 \cos^2(\beta y) \text{)}$$

Les grandeurs électromagnétiques varient en général très rapidement au cours du temps, et la plupart des détecteurs ont un temps de réponse beaucoup plus long que la période de ces phénomènes. Ils ne sont alors sensible qu'aux valeurs moyennes.

A7 :



L'interfrange est la distance entre 2 franges sombres (ou brillantes)

il est donné par $\beta \frac{i}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{i = \frac{\pi}{\beta}} = \frac{\pi}{k \sin\theta} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_0} \sin\theta}$.

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0}{2 \sin\theta}}$$

A8. $(\vec{A}\wedge\vec{u})\cdot(\vec{B}\wedge\vec{u}) = \vec{u}\cdot\left[(\vec{A}\wedge\vec{u})\wedge\vec{B}\right] = \vec{u}\cdot\left[\vec{B}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{A})\right]$

permutation du produit mixte

$= \vec{u}\cdot\left[(\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{u} - (\vec{B}\cdot\vec{u})\vec{A}\right] = \vec{A}\cdot\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{u})\,(\vec{B}\cdot\vec{u})$.

A9. $\text{rot}\,\vec{\mathcal{E}_1} = i\omega\mu_0\vec{\mathcal{H}_1} \Rightarrow \vec{\mathcal{H}_1} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\, i\,\vec{k_1}\wedge\vec{\mathcal{E}_1} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega\mu_0}\,\vec{k_1}\wedge\vec{e_z}\, e^{i\vec{k_1}\cdot\vec{r}}$

$\vec{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{\omega\mu_0}\,\vec{k_2}\wedge\vec{\mathcal{E}_2} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega\mu_0}\,\vec{k_2}\wedge\vec{e_z}\, e^{i\vec{k_2}\cdot\vec{r}}$

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega\mu_0}\left(\vec{k_1}\,e^{i\vec{k_1}\cdot\vec{r}} + \vec{k_2}\,e^{i\vec{k_2}\cdot\vec{r}}\right)\wedge\vec{e_z}$$

A10. $\vec{\mathcal{H}_1}$ est le produit d'un nombre complexe par le vecteur réel $\vec{k_1}\wedge\vec{e_z}$.
$\vec{\mathcal{H}_1}$ est donc polarisé rectilignement, parallèlement à $\vec{k_1}\wedge\vec{e_z}$.
$\vec{\mathcal{H}_2}$ — $\vec{k_2}\wedge\vec{e_z}$.
On ne peut pas en dire autant de $\vec{\mathcal{H}}$, qui est polarisé elliptiquement.

A11. $\langle\vec{H}^2\rangle = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{H}}\cdot\vec{\mathcal{H}}^*$

$= \frac{1}{2}\frac{|\mathcal{E}_0|^2}{\omega^2\mu_0^2}\left[\left(\vec{k_1}\,e^{i\vec{k_1}\cdot\vec{r}} + \vec{k_2}\,e^{i\vec{k_2}\cdot\vec{r}}\right)\wedge\vec{e_z}\right]\cdot\left[\left(\vec{k_1}\,e^{-i\vec{k_1}\cdot\vec{r}} + \vec{k_2}\,e^{-i\vec{k_2}\cdot\vec{r}}\right)\wedge\vec{e_z}\right]$

$= \frac{|\mathcal{E}_0|^2}{2\omega^2\mu_0^2}\left\{\left(\vec{k_1}\,e^{i\vec{k_1}\cdot\vec{r}} + \vec{k_2}\,e^{i\vec{k_2}\cdot\vec{r}}\right)\cdot\left(\vec{k_1}\,e^{-i\vec{k_1}\cdot\vec{r}} + \vec{k_2}\,e^{-i\vec{k_2}\cdot\vec{r}}\right) - 0\right]$

car $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$ n'ont pas de composante selon $\vec{e_z}$

$$\langle\vec{H}^2\rangle = \frac{|\mathcal{E}_0|^2}{2\omega^2\mu_0^2}\left\{\vec{k_1}^2 + \vec{k_2}^2 + \vec{k_1}\cdot\vec{k_2}\left(e^{i(\vec{k_1}-\vec{k_2})\cdot\vec{r}} + e^{-i(\vec{k_1}-\vec{k_2})\cdot\vec{r}}\right)\right\}$$

$$= \frac{|\mathcal{E}_0|^2}{2\omega^2\mu_0^2}\left\{k^2 + k^2 + k^2\cos(2\theta)\left(e^{i2\beta y} + e^{-i2\beta y}\right)\right\}$$

Car le carré scalaire du vecteur d'onde est égal à $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu_0$.

$\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$ font entre eux un angle de 2θ.

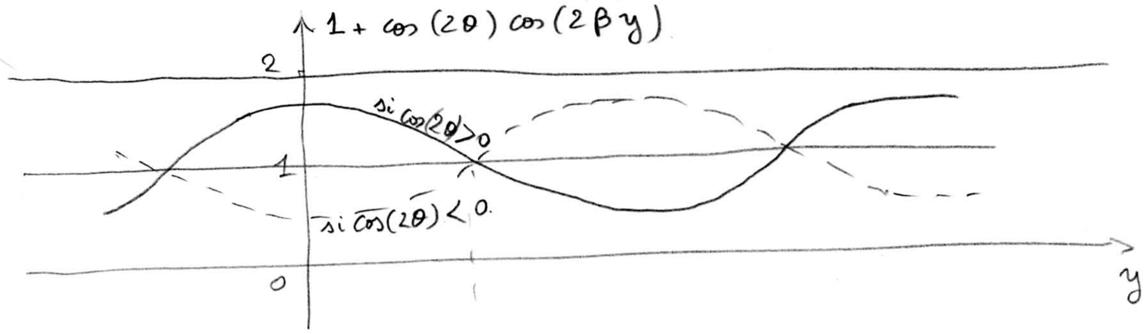
$$= \frac{|\mathcal{E}_0|^2}{2\omega^2\mu_0^2}\,k^2\left\{2 + 2\cos(2\theta)\cos(2\beta y)\right\}$$

$$= \frac{|\mathcal{E}_0|^2\,\cancel{\omega^2}\,\varepsilon\,\cancel{\mu_0}}{\cancel{\omega^2}\,\mu_0^{\cancel{2}}}\left\{1 + \cos(2\theta)\cos(2\beta y)\right\}$$

$$\boxed{\langle\vec{H}^2\rangle = |\mathcal{E}_0|^2\,\frac{\varepsilon}{\mu_0}\left\{1 + \cos(2\theta)\cos(2\beta y)\right\}}$$

On voit donc que :

* si $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos(2\theta) = 0$, $\langle \vec{H}^2 \rangle$ est constant dans tout l'espace.
* si $\theta < \frac{\pi}{4}$, $\cos(2\theta) > 0$, $\langle \vec{H}^2 \rangle$ est maximal pour $y = 0$.
* si $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos(2\theta) < 0$, $\langle \vec{H}^2 \rangle$ est minimal pour $y = 0$.



On voit donc que si $\theta < \frac{\pi}{4}$, les minima de $\langle \vec{E}^2 \rangle$ et $\langle \vec{H}^2 \rangle$ se produisent pour les mêmes valeurs de y.

Tandis que si $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, les minima de $\langle \vec{H}^2 \rangle$ correspondent aux maxima de $\langle \vec{E}^2 \rangle$, et vice versa.

<u>A12</u> $\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \wedge \overline{\vec{\mathcal{H}}}$

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \vec{e_z} \left(e^{i \vec{k_1} \cdot \vec{r}} + e^{i \vec{k_2} \cdot \vec{r}} \right) = \mathcal{E}_0 \vec{e_z} \, e^{i\alpha x} \left(e^{i\beta y} + e^{-i\beta y} \right)$$

$$= 2 \mathcal{E}_0 \vec{e_z} \, e^{i\alpha x} \cos(\beta y)$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega \mu_0} e^{i\alpha x} \left(\vec{k_1} e^{i\beta y} + \vec{k_2} e^{-i\beta y} \right) \wedge \vec{e_z}$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \mathcal{E}_0 \vec{e_z} \cancel{e^{i\alpha x}} \cos(\beta y) \wedge \left[\frac{\overline{\mathcal{E}_0}}{\omega \mu_0} \cancel{e^{-i\alpha x}} \left(\vec{k_1} e^{-i\beta y} + \vec{k_2} e^{+i\beta y} \right) \wedge \vec{e_z} \right].$$

$$= \frac{|\mathcal{E}_0|^2 \cos(\beta y)}{\omega \mu_0} \vec{e_z} \wedge \left[\left(\vec{k_1} e^{-i\beta y} + \vec{k_2} e^{i\beta y} \right) \wedge \vec{e_z} \right]$$

$$= \frac{|\mathcal{E}_0|^2}{\omega \mu_0} \cos(\beta y) \left\{ \vec{k_1} e^{-i\beta y} + \vec{k_2} e^{i\beta y} \right\}$$

$$Re(\vec{\mathcal{P}}) = \frac{|\mathcal{E}_0|^2}{\omega \mu_0} \cos(\beta y) \left\{ \vec{k_1} + \vec{k_2} \right\} \cos(\beta y) = \boxed{\frac{|\mathcal{E}_0|^2}{\omega \mu_0} \cos^2(\beta y) \; 2k \cos\theta \; \vec{e_x} = Re(\vec{\mathcal{P}})}$$

On voit donc que l'énergie se propage selon l'axe des x, avec un interfrange selon y lié à $\cos^2(\beta y)$, donc des "franges" identiques à celles de $\langle \vec{E}^2 \rangle$.

A13. $\langle w\rangle = \frac{1}{2}\,\varepsilon\langle \vec{E}^2\rangle + \frac{\mu_0}{2}\langle \vec{H}^2\rangle$

$$= \varepsilon\,|\mathcal{E}_0|^2 \cos^2(\beta y) + \frac{\cancel{\mu_0}}{2}|\mathcal{E}_0|^2 \frac{\varepsilon}{\cancel{\mu_0}}\left\{1 + \cos(2\theta)\cos(2\beta y)\right\}.$$

$$= \varepsilon\,|\mathcal{E}_0|^2 \left\{ \frac{1+\cos(2\beta y)}{2} + \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\theta)\cos(2\beta y)\right)\right\}.$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon\,|\mathcal{E}_0|^2 \left\{ 2 + \cos(2\beta y) + \cos(2\theta)\cos(2\beta y)\right\}.$$

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,|\mathcal{E}_0|^2 \left\{ 2 + (1+\cos(2\theta))\cos(2\beta y)\right\}$$

Là aussi, les maxima et minima sont obtenus aux mêmes valeurs de y que pour $\langle \vec{E}^2\rangle$.

A14. On peut faire le lien avec les franges d'interférences obtenues quand on fait interférer deux ondes planes. (expérience des miroirs de Fresnel par exemple).
En général, on observe ces franges sur un écran, ou un capteur, et c'est généralement à $\langle \vec{E}^2\rangle$ que ces "détecteurs" sont sensibles.
Sans surprise, les franges relatives à l'énergie et à son déplacement (Poynting) se superposent à celles de $\langle \vec{E}^2\rangle$.
Par contre, la localisation des extrema de $\langle \vec{H}^2\rangle$ est loin d'être intuitive!